TÌM HIỂU THÊM VỀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH TRONG ĐỀ THI ĐẠI HỌC

GV: Đinh Quang Minh

Các em học sinh thân mến.

Trong đề thi tuyển sinh Đại học & Cao đẳng trong các năm gần đây hay xuất hiện các bài về giải phương trình hoặc hệ phương trình mà phương pháp giải không thể đơn thuần dùng phép thế, đặt ẩn phụ, nâng lên lũy thừa thích hợp… là có thể giải được mà phải dùng tới phương pháp hàm số thì mới có thể giải được.

Ví dụ: 1. Giải PT: $4^{2x+\sqrt{x+2}}+2^{x^3}=4^{2+\sqrt{x+2}}+2^{x^3+4x-4}$ (Khối D - 2010)

2. Giải hệ: $\begin{cases}(4x^2+1)x+(y-3)\sqrt{5-2y}=0\\4x^2+y^2+2\sqrt{3-4x}=7\end{cases}$ (Khối A- 2010)

Giải hai bài toán trên thật không dễ tý nào nếu không nắm được một số định lý cơ bản và kỹ năng biến đổi.

Trong bài viết này Thầy muốn gửi tới tất các em học sinh Trường THPT Đoàn Kết đặc biệt học sinh khối 12 chuẩn bị cho thi Đại học – Cao đẳng năm 2013-2014 một phương pháp giải PHƯƠNG TRÌNH – HỆ PHƯƠNG TRÌNH dạng như trên.

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM:

1.Định lý 1: Hàm số f(x) **đồng biến** (nghịch biến) trên khoảng (a; b), g(x) **nghịch biến** (đồng biến) trên khoảng (a; b) và tồn tại $x_0\in(a;b)$ sao cho $f(x_0)=g(x_0)$ thì phương trình f(x) = g(x) có nghiệm duy nhất $x=x_0$.

2. Định lý 2: Với x,y,t thuộc miền xác định D ; hàm số f(t) xác định trên D, **tăng nghiêm ngặt** (giảm nghiêm ngặt) trên D . Khi đó phương trình $f(x)=g(x)\Leftrightarrow x=y$

+ Chú ý: Các hàm số đang xét liên tục trên khoảng xác định

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI:

I. Dạng 1: Phương trình mũ (log) tạm gọi là loại chứa biến ở mũ (hoặc ở biểu thức trong log) và biến ở hệ số .

- Biểu diễn về tích chẳng hạn : f(x).g(x) = 0
- Trong f(x) = 0 là phương trình cơ bản ,
  g(x) = 0 giải bằng định lý 1
- **Lưu ý**: Nếu giải trên đoạn [a;b] thì kiểm tra $x=a, x=b$ có là nghiệm không sau đó xét hàm số trên khoảng (a;b)

Ví dụ 1: Giải PT $4^{2x+\sqrt{x+2}}+2^{x^3}=4^{2+\sqrt{x+2}}+2^{x^3+4x-4}$ (*) (Khối D - 2010)

Giải: ĐK: $x\ge -2$ Với điều kiện trên thì $(*)\Leftrightarrow 2^{4x+2\sqrt{x+2}}+2^{x^3}=2^{4+2\sqrt{x+2}}+2^{x^3+4x-4}$

$$\Leftrightarrow (2^{4x}-2^4)(2^{2\sqrt{x+2}}-2^{x^3-4})=0$$

TH 1: $2^{4x}-2^4=0\Leftrightarrow x=1$

TH 2: $2^{2\sqrt{x+2}}-2^{x^3-4}=0\Leftrightarrow 2\sqrt{x+2}=x^3-4$

Đk: $x\ge\sqrt[3]{4}$ và $x=\sqrt[3]{4}$ không là nghiệm

$$f(x)=2\sqrt{x+2}-x^3+4\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x+2}}-3x^2<0\ \ \forall x\in(\sqrt[3]{4};+\infty)$$

Ta có $f(2)=0$ nên x = 2 là nghiệm duy nhất

Vậy phương trình (*) có hai nghiệm x = 1 , x = 2

Ví dụ 2: $(x+2)\log_3^2(x+1)+4(x+1)\log_3(x+1)-16=0$

Giải:

ĐK: x > -1 , Đặt $t=\log_3(x+1)$

Ta có: $(x+2)t^2+4(x+1)t-16=0$

Giải phương trình theo t được $t=-4$, $t=\frac{4}{x+2}$

TH 1: t = - 4 ta có $\log_3(x+1)=-4\Leftrightarrow x=-1+\frac{1}{81}$ (thỏa đk)

TH2: $t=\frac{4}{x+2}$ Ta có $\log_3(x+1)=\frac{4}{x+2}$

$f(x)=\log_3(x+1)\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{(x+1)\ln 3}>0 \quad \forall x>-1$

$g(x)=\frac{4}{x+2}\Rightarrow g'(x)=-\frac{4}{(x+2)^2}<0 \quad \forall x>-1$

Mà f(2) = g(2)= 1

Vậy x = 2 là nghiệm duy nhất

II. Dạng 2: Phương trình hoặc trong hệ phương trình có một phương trình sau khi biến đổi (có thể đặt ẩn phụ) được một phương trình mà mỗi vế của phương trình là hai biểu thức chỉ khác nhau về ký hiệu biến

Ví dụ như: $u^3+3u=v^3+3v$ và hàm số đặc trưng tăng nghiêm ngặt hoặc giảm nghiêm ngặt trên khoảng đang xét .

Ví dụ 3: Giải hệ $\begin{cases}(4x^2+1)x+(y-3)\sqrt{5-2y}=0 & (1)\\ 4x^2+y^2+2\sqrt{3-4x}=7 & (2)\end{cases}$

ĐK: $x\le\frac{3}{4}$, $y\le\frac{5}{2}$

$(1)\Leftrightarrow(4x^2+1)2x=[(5-2y)+1]\sqrt{5-2y}=0$

Đặt $u=\sqrt{5-2y}$, $v=2x$

Ta có $(v^2+1)v=(u^2+1)u$ (*)

Xét $f(t)=t^3+t\Rightarrow f'(t)=3t^2+1>0$ Hàm f(t) tăng nghiêm ngặt

Do đó $(*)\Leftrightarrow u=v\Leftrightarrow\sqrt{5-2y}=2x\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ y=\frac{5-4x^2}{2}\end{cases}$

Thay vào PT (2) ta được $4x^2+\left(\frac{5}{2}-2x^2\right)^2+2\sqrt{3-4x}-7=0$

Rõ ràng x = 0 và $x=\frac{3}{4}$ không là nghiệm,

Xét hàm $g(x)=4x^2+\left(\frac{5}{2}-2x^2\right)^2+2\sqrt{3-4x}-7 \quad x\in\left(0;\frac{3}{4}\right)$

$g'(x)=4x(4x^2-3)-\frac{4}{\sqrt{3-4x}}<0 \quad x\in\left(0;\frac{3}{4}\right)$, hàm giảm nghiêm ngặt

Mà $g\left(\frac{1}{2}\right)=0$ Vậy $x=\frac{1}{2}$ là nghiệm duy nhất khi đó y = 2

Vậy hệ đã cho có nghiệm $x=\frac{1}{2}, y=2$

Ví dụ 4: Giải PT : $3^{x^2+1} - 3^{2x} = -x^2 + 2x - 1$ (1).

Giải :

Đặt $u = x^2 + 1, v = 2x$, ta có :

(1) thành $3^u - 3^v = v - u \Leftrightarrow 3^u + u = 3^v + v$ (2).

Xét hàm số $f(t) = 3^t + t \Rightarrow f'(t) = 3^t \ln 3 + 1 > 0$

$(2) \Leftrightarrow f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v \Leftrightarrow v - u = 0$

$\Leftrightarrow -x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

Vậy (1) có nghiệm duy nhất x = 1.

Ví dụ 5: Giải hệ: $\begin{cases} x^5 + xy^4 = y^{10} + y^6 & (1) \\ \sqrt{4x+5} + \sqrt{y^2+8} = 6 & (2) \end{cases}$

Từ (1) suy ra hệ có nghiệm khi $x \geq 0$

Rõ ràng y = 0 không là nghiệm

$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^5 + \frac{x}{y} = y^5 + y \quad (*)$

Xét hàm $f(t) = t^5 + t \Rightarrow f'(t) = 5t^4 + 1 > 0$

$(*) \Leftrightarrow \frac{x}{y} = y \Leftrightarrow x = y^2$, thay vào (2) ta được

$\sqrt{4x+5} + \sqrt{x+8} - 6 = 0$, Có x = 0 không là nghiệm

$f(x) = \sqrt{4x+5} + \sqrt{x+8} - 6 \quad (x > 0)$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x+5}} + \frac{1}{2\sqrt{x+8}} > 0 \quad (\forall x > 0)$

Mà $f(1) = 0$ Suy ra x = 1 là nghiệm duy nhất khi đó $y = \pm 1$

Bài tập vận dụng: Giải phương trình , hệ phương trình sau

1. a. $\begin{cases} 2(2x+1)^3 + 2x + 1 = (2y-3)\sqrt{y-2} \\ \sqrt{4x+2} + \sqrt{2y+2} = 6 \end{cases}$

   b. $\begin{cases} x^3 - 3x^2 - 9x + 22 = y^3 + 3y^2 - 9y \\ x^2 + y^2 - x + y = \frac{1}{2} \end{cases}$ (Khối a năm 2012)

   c. $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt[4]{x-1} - \sqrt{y^4+2} = y \\ x^2 + 2x(y-1) + y^2 - 6y + 1 = 0 \end{cases}$ (Khối a năm 2013)

2. a. $3^{2x-1} + 3^{x-1}(3x-7) - x + 2 = 0$ (SBT- Giải tích 12 NC)

   b. $25^{5-x} - 2.5^{5-x}(x-2) + 3 - 2x = 0$ (SBT- Giải tích 12 NC)

Cuối cùng chúc các em học tập tốt và thành công trong các kỳ thi sắp tới