I. Rút gọn+luỹ thừa hai vế pt+Đưa thành PT tích

1. $\sqrt{x+1}+\sqrt{4x+13}=\sqrt{3x+12}$ Điều kiện $x\ge -1$

Pt $\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)(4x+13)}=-x-1 \Leftrightarrow \begin{cases}-x-1\ge 0\\(x+1)(4x+13)=(-x-1)^2\end{cases} \Leftrightarrow x=-1$

2. (ĐH D 05) $2\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+1}=4$

ĐS: x=3. Biến trong căn thành BP và bỏ khỏi căn được: $2(\sqrt{x+1}+1)-\sqrt{x+1}=4$

3. $x=\sqrt{x-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}$. ĐK: $x\ge 1$

Bình phương hai vế do không âm….dại thế! $Pt: x-\sqrt{1-\frac{1}{x}}=\sqrt{x-\frac{1}{x}} \Leftrightarrow x^2-2\sqrt{x^2-x}+1-\frac{1}{x}=x-\frac{1}{x}$

(Do $x\ge 1$ thì hai vế không âm) $\Leftrightarrow (\sqrt{x^2-x}-1)^2=0 \Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

4. (ĐH A 04) $\frac{\sqrt{2(x^2-16)}}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{x-3}>\frac{7-x}{\sqrt{x-3}}$

ĐS: $x>10-\sqrt{34}$. ĐK, quy đồng MS, được: $\sqrt{2(x^2-16)}+x-3>7-x$, đây là bài cơ bản

5. (ĐH A 05) $\sqrt{5x-1}-\sqrt{x-1}>\sqrt{2x-4}$ ĐS: [2; 10], bình phương hai lần. ĐK: x ≥ 2

$Bpt: 5x-1>2x-4+2\sqrt{2x-4}\sqrt{x-1}+x-1 \Leftrightarrow x+2>\sqrt{(2x-4)(x-1)}$

6. $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-4x+3}=2\sqrt{x^2-5x+4}$

Bpt: $\sqrt{(x-1)(x-2)}+\sqrt{(x-1)(x-3)}=2\sqrt{(x-1)(x-4)}$. ĐK: $x\ge 4; x\le 1$

TH1: $x\ge 4$; Pt: $\sqrt{(x-2)}+\sqrt{(x-3)}=2\sqrt{(x-4)}$ (Bình phương…dại thế!)

Vì $\sqrt{(x-2)}>\sqrt{(x-4)}, \sqrt{(x-3)}>\sqrt{(x-4)}$, Nên Pt VN (khôn thế…!)

TH2: $x<1$: Pt $\sqrt{(2-x)}+\sqrt{(3-x)}=2\sqrt{(4-x)}$ *VN*. ĐS: x=1

7. (Dự bị D 06) $x+2\sqrt{7-x}=2\sqrt{x-1}+\sqrt{-x^2+8x-7}+1$

ĐS: x=4; x=5, đưa thành tích, nhờ phân tích trong căn và nhóm. ĐK: $1\le x\le 7$

Pt: $x-1+2\sqrt{7-x}-2\sqrt{x-1}-\sqrt{(x-1)(7-x)}=0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}-2)-\sqrt{7-x}(\sqrt{x-1}-2)=0 \Leftrightarrow (\sqrt{x-1}-\sqrt{7-x}).(\sqrt{x-1}-2)=0$

8. (ĐH A 10) $\frac{x-\sqrt{x}}{1-\sqrt{2(x^2-x+1)}}\ge 1$. ĐS: $x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

ĐK: x ≥ 0 .Để ý MS luôn dương vì căn nhỏ hơn 1, Bpt: $\sqrt{2(x^2-x+1)}\le -x+\sqrt{x}+1$

Đến đây dùng BĐT BNC $1.(1-x)+1.\sqrt{x}\le \sqrt{(1+1)[(1-x)^2+(\sqrt{x})^2]}$. hoặc BP và nhóm lại

$(x+\sqrt{x})^2-2(x+\sqrt{x})+1\le 0$

$\Leftrightarrow x+\sqrt{x}-1=0$

9. (ĐH B 10) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0$. ĐS: x=5

ĐK: $-1/3\le x\le 6$; Dự đoán nghiệm là 5, ta sẽ tạo ra hai liên hợp ứng với hai căn, sao cho có nhân tử x-5, ta làm như sau: $(\sqrt{3x+1}-4)+(1-\sqrt{6-x})+(3x^2-14x-5)=0$ sau khi nhân liên hợp và ra PT tích được một nhân tử luôn dương trên D. $\frac{3x-15}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{x-5}{1+\sqrt{6-x}}+(x-5)(3x+1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-5=0\\ \frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{1+\sqrt{6-x}}+(3x+1)=0 \ \ (VN)\end{array}\right.$

II. Rút gọn, phân tích rồi đặt ẩn phụ

10. $x^2+\sqrt{x^2-3x+5}=3x+7$. $\sqrt{x^2-3x+5}=t$ $(t\ge 0)$ ta được $t^2+t-12=0$, ta được $x=-1$ hoặc $x=4$

CV: VÕ THANH HẢI - LT ĐH&CĐ

11. (ĐH A 02) $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}=2x-12+2\sqrt{x^2-16}$

ĐS: x=5. ĐK: $4\le x$. Đặt $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}=t\ge 0 \Rightarrow t^2=2x+2\sqrt{x+4}\sqrt{x-4}$, t2-t-12=0 $\Leftrightarrow t=-3(l); t=4$

12. (ĐH NT) $\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}=4-\left(x+\frac{1}{x}\right)$. ĐS: x=1

Chia TH để xét. Bình phương để kết hợp các bộ nghịch đảo bằng cách đặt $x+\frac{1}{x}$=t

ĐK $\begin{cases}-1/\sqrt{2}\le x<0;\ 0<x\le 1/\sqrt{2}\\ 0<x\le 2-\sqrt{3};\ 2+\sqrt{3}\le x\end{cases} \Leftrightarrow 0<x\le 2-\sqrt{3}$. Pt: $4-(t^2-2)+2\sqrt{5-2(t^2-2)}=(4-t)^2,\ 2\le t<4$

$\Leftrightarrow \sqrt{9-2t^2}=t^2-4t+5 \Leftrightarrow t^4-8t^3+28t^2-40t+16=0 \Leftrightarrow (t-2)[t(t-3)^2+7t-8]=0 \Leftrightarrow t=2\Rightarrow x=1$

13. $\sqrt{5x^2+14x+9}-\sqrt{x^2-x-20}=5\sqrt{x+1}$. ĐK: $x\ge 5$. $\sqrt{5x^2+14x+9}-\sqrt{x^2-x-20}=5\sqrt{x+1}\Leftrightarrow\sqrt{5x^2+14x+9}=5\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-x-20}$

Bình phương. $2\left(x^2-4x-5\right)+3\left(x+4\right)=5\sqrt{\left(x^2-4x-5\right)\left(x+4\right)}$

Đặt $t=\sqrt{\frac{x^2-4x-5}{x+4}},\ t\ge 0$. Ta được: $2t^2-5t+3=0\Leftrightarrow t=1,\ t=\frac{3}{2}$. PT có nghiệm $x=\frac{5+\sqrt{61}}{2},\ x=8$.

14. $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}>1$: ĐS: [1;2],[10;+∞) .ĐK: $x\ge 1$

Đặt $\sqrt[3]{2-x}=t, t\le 1, \Rightarrow \sqrt{x-1}=\sqrt{1-t^3}$. Bpt: $t+\sqrt{1-t^3}>1\Leftrightarrow\begin{cases}t\le 1\\ t(t^2+t-2)<0\end{cases}$

15. $(4x-1)\sqrt{x^2+1}=2x^2+2x+1$. Đặt $\sqrt{x^2+1}=t\ \ (t\ge 0)$ ta được phương trình

$2t^2-(4x-1)t+2x-1=0\Leftrightarrow t=2x-1;$ t=1/2. Từ đó, giải tìm x ta được x=4/3

16. $2(x^2+2)=5\sqrt{x^3+1}$ ĐS: $x=\frac{5\pm\sqrt{37}}{2}$

Từ nhận xét HĐT trong căn, và ẩn bên ngoài căn ta đặt u=$\sqrt{x+1}$; v=$\sqrt{x^2-x+1}$ sau đó biến đổi hợp lý để thay vào PT. $2(x^2-x+1+x+1)=5\sqrt{(x+1)(x^2-x+1)}$. ĐK: $x\ge -1$ .Pt: $2(u^2+v^2)=5uv\Leftrightarrow 2u(u-2v)-v(u-2v)=0$

(Có thể dùng PT bậc hai) $\Leftrightarrow u=2v; v=2u$

17. $\sqrt[4]{57-x}+\sqrt[4]{x+40}=5$ ĐS: x=-24; x=41. Đặt ẩn phụ đưa về HPT đối xứng loại 1

ĐK: $-40\le x\le 57$. Đặt: $\sqrt[4]{57-x}=u\ge 0;\ \sqrt[4]{x+40}=v\ge 0$ .Ta có: $\begin{cases}u+v=5\\ u^4+v^4=\left((u+v)^2-2uv\right)^2-2u^2v^2=97\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=5\\ 2u^2v^2-100uv+528=0\end{cases}\Leftrightarrow uv=44(l); uv=6$

18. $x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}$.Đặt $\sqrt[3]{2x-1}=y\Rightarrow 2x-1=y^3\Rightarrow 2x=y^3+1$. $\begin{cases}x^3+1=2y\\ y^3+1=2x\end{cases}$ được $x=1;\ \ x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

III. Dùng hàm số+Đánh giá hai vế.

19. $\sqrt{x^2-2x+3}-\sqrt{x^2-6x+11}>\sqrt{3-x}-\sqrt{x-1}$. ĐS: $(2;3]$

Xét hàm số: f(t)= $\sqrt{t+2}+\sqrt{t}$ ĐK: $1\le x\le 3$. $\sqrt{(x-1)^2+2}+\sqrt{x-1}>\sqrt{(3-x)^2+2}+\sqrt{3-x}$

Xét hàm số: f(t)= $\sqrt{t+2}+\sqrt{t}$ có f'(t)>0. x-1>3-x hay x>2

20. $\sqrt{4x-1}+\sqrt{4x^2-1}=1$. ĐK: $x\ge 1/2$. VT'=$\frac{2}{\sqrt{4x-1}}+\frac{4x}{\sqrt{4x^2-1}}>0\ \forall x\ge 1/2$ .Nên x=1/2 là nghiệm duy nhất

21. $\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x-1}=2$ Nhận xét: $VT=\sqrt{(x-1)^2+4}+\sqrt{x-1}\ge 2\ \ \forall x$ .Suy ra $VT=2\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1$

22. $x-3+\sqrt{15-x}\ge\sqrt{2(x^2-7x+24)}$ ĐS: x=6. Đặt: $u=x-3; v=\sqrt{15-x}$ và bình phương

ĐK: x≤15. u+v≥ $\sqrt{2(u^2+v^2)}$ suy ra: (u-v)2≤0 nên: $x-3=\sqrt{15-x}$ hay x=6. Thử lại t/m

GV: VÕ THÀNH HẢI – LT ĐH&CĐ