KHAI THÁC YẾU TỐ "ĐIỂM THUỘC ĐƯỜNG THẲNG, GIAO ĐIỂM CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG" TRONG HÌNH HỌC TOẠ ĐỘ.

★

----------★ ★★----------

Môn hình học giải tích hay phương pháp tọa độ trong mặt phẳng và trong không gian xuyên suốt chương trình hình học lớp THPT, trong đó các vấn đề về "đường thẳng" chiếm một lượng kiến thức khá lớn trong giáo trình. Từ đó chúng ta cũng thấy "đường thẳng" là một đề tài hấp dẫn đối với người dạy học và ra đề thi. Khi nói đến đường thẳng, ta nghĩ đến các tương quan về mối quan hệ giữa đường thẳng và các đối tượng hình học khác.

Trong kỳ thi tuyển sinh Đại Học và Cao Đẳng các năm thì bài toán hình học giải tích phẳng, hình học giải tích không gian luôn là bài toán bắt buộc. Hãy để ý một chút, chúng ta sẽ thấy trong các bài toán này, chiếm khoảng 80% về đường thẳng. Trong bài viết này, người viết muốn chia sẻ một kinh nghiệm nhỏ trong quá trình dạy học và nghiên cứu đến đồng nghiệp và độc giả, một chấm phá nhỏ nhưng cũng đại diện cho một lớp bài rộng, đó là vấn đề dấu hiệu "cắt nhau", hoặc qua một yếu tố nào đó ta khai thác bài toán và thấy được yếu tố "điểm thuộc đường thẳng" trong bài toán. Ở đây trong một chừng mực nào đó chúng ta sẽ giải quyết được các vấn đề:

Thứ nhất, nếu chúng ta khai thác được yếu tố "điểm thuộc đường thẳng khi tọa độ điểm thỏa phương trình của nó", khi đó nếu chúng ta biểu diễn tọa độ điểm dưới dạng một tham số thì vấn đề còn lại là cố tìm trong giả thiết bài toán một yếu tố nào đó mà qua đó biểu diễn được một hệ thức theo tham số nói trên thì vấn đề sẽ sáng tỏ, tức là điểm đó hoàn toàn được xác định. Tất nhiên chúng ta cũng có nhiều cách để thể hiện mối quan hệ đó nhưng nó sẽ rườm rà, thông thường ta phải giải quyết một hệ phương trình nào đó..., chắc chắn về nghĩa tường minh và tính sư phạm sẽ không tốt bằng cách thể hiện nói trên.

Thứ hai, nếu chúng ta khai thác theo cách nói trên (tọa độ điểm theo chỉ một tham số) thì sẽ giải quyết một số lớn bài toán hình học giải tích mà "mạnh nhất" là hình học giải tích trong không gian về sự tường minh "chính hiệu" hình học giải tích, ta không phải thật sự lo nghĩ về bài toán dựng hình theo nghĩa trực quan hình học (tất nhiên cách dựng hình theo nghĩa trực quan hình học nó có tác dụng đến giáo dục tư duy theo một nghĩa sư phạm nào đó, nhưng có thể người học không xét hết các khả năng có thể xảy ra thì dẫn đến bài toán không đúng nữa). Chẳng hạn như các bài toán trong không gian tọa độ : viết phương trình đường thẳng vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau. Viết phương trình đường thẳng qua một điểm cho trước và cắt đồng thời cả hai đường thẳng chéo nhau cho trước. Viết phương trình đường thẳng qua một điểm cho trước, cắt một đường thẳng cho trước và vuông góc với đường thẳng đó vv...

Sau cùng người viết xin tiếp thu ý kiến đóng góp của quý đồng nghiệp cho bài viết này tốt hơn. Xin giới thiệu một số bài toán minh họa cho bài viết này:

★ Bài 1. (Đề thi Đại học khối A năm 2002)

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho điểm M(2; 1; 4) và đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$.

Tìm tọa độ điểm H trên đường thẳng Δ sao cho độ dài đoạn MH nhỏ nhất.

• *Nhận xét.* Bài này có nhiều cách giải, chẳng hạn sau đây là một cách giải thông dụng :

GV. VÕ THANH HẢI - THPT ĐOÀN KẾT

Gọi (x; y; z) là tọa độ điểm H , ta có: $\overrightarrow{MH}$ = (x -2; y – 1; z – 4), đường thẳng Δ có một VTCP $\vec{u}$ = (1; 1; 2). Tọa độ (x; y; z) của điểm H thỏa :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \\ 1(x-2) + 1(y-1) + 2(z-4) = 0 \end{cases}.$$

Từ đây, giải hệ này bằng cách thế x, y, z từ 3 phương trình đầu vào phương trình cuối, giải tìm được t và thay giá trị của t tìm được vào 3 phương trình trên ta có tọa độ H là (2; 3; 3)

• *Sau đây là cách giải theo ý tưởng của bài viết*

Ta có $H \in \Delta \Rightarrow H(1 + t; 2 + t; 1 + 2t) \Rightarrow \overrightarrow{MH} = (t - 1; t + 1; 2t - 3)$. Δ có 1VTCP $\vec{u}$ = (1; 1; 2). Độ dài đoạn MH nhỏ nhất khi MH vuông góc với đường thẳng Δ , từ đó ta có:
$\vec{u} \perp \overrightarrow{MH} \Leftrightarrow \vec{u} . \overrightarrow{MH} = 0 \Leftrightarrow 1(t - 1) + 1(t + 1) + 2(2t - 3) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow H(2; 3; 3)$.

★ Bài 2. (Đề thi Đại học khối A năm 2006)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho các đường thẳng
$d_1 : x + y + 3 = 0$, $d_2 : x - y - 4 = 0$, $d_3 : x - 2y = 0$.
Tìm tọa độ điểm M nằm trên đường thẳng d_3 sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng d_1 bằng hai lần khoảng cách từ M đến đường thẳng d_2.

• *Nhận xét.* Sau đây là một cách giải thông dụng :
Gọi (x; y) là tọa độ của điểm M, theo bài ra ta có :

$$\begin{cases} M \in d_3 \\ d(M, d_1) = 2.d(M, d_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ \dfrac{|x + y + 3|}{\sqrt{2}} = 2.\dfrac{|x - y - 4|}{\sqrt{2}} \end{cases}.$$

Dùng phương pháp thế để giải hệ này ta được kết quả $\begin{cases} x = -22 \\ y = -11 \end{cases}$ và $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

Từ đó ta có hai điểm thỏa đề bài là : (-22; -11) và (2; 1).

• *Sau đây là cách giải theo ý tưởng của bài viết*

Gọi M(2t; t) là điểm trên đường thẳng d_3, theo bài ra ta có : $d(M, d_1) = 2.d(M, d_2)$

$$\Leftrightarrow \frac{|2t + t + 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 2.\frac{|2t - t - 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} \Leftrightarrow |3t + 3| = 2|t - 4| \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3t + 3 = 2t - 8 \\ 3t + 3 = 8 - 2t \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t = -11 \\ t = 1 \end{bmatrix}.$$

Vậy có hai điểm thỏa đề bài là : (-22; -11) và (2; 1).

GV: VÕ THANH HẢI - THPT ĐOÀN KẾT

★ Bài 3. (Đề thi Đại học khối B năm 2006)

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho điểm A(0; 1; 2) và hai đường thẳng :

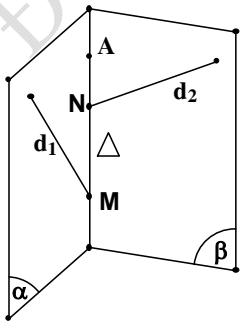
$$d_1 : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}, \quad d_2 : \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1-2t \\ z = 2+t \end{cases}.$$

Tìm điểm M thuộc d_1, N thuộc d_2 sao cho ba điểm A, M, N thẳng hàng.

• *Nhận xét.* Vì đây là bài toán xét trong không gian nên chúng ta để ý có các khả năng xảy ra :

1. Ba đối tượng : Điểm A và hai đường thẳng d_1, d_2 đồng phẳng (cắt, trùng, song song) thì bài toán có vô số nghiệm hình.
2. d_1, d_2 cắt nhau và A không thuộc mp(d_1, d_2) thì bài toán có một nghiệm hình.
3. d_1 và d_2 song song với nhau và A không thuộc mp(d_1, d_2) thì bài toán vô nghiệm.
4. d_1 và d_2 chéo nhau và A thuộc một trong hai đường thẳng trên thì bài toán có vô số nghiệm
5. d_1 và d_2 chéo nhau và A không thuộc cả hai đường thẳng trên thì bài toán có một nghiệm

• *Sau đây là một hướng giải thông dụng.*



Kiểm tra :

1. Dễ thấy A không thuộc d_1 và d_2
2. d_1 và d_2 chéo nhau (HS bắt buộc phải làm khâu này!)

Từ đó ta tìm (viết phương trình)

• Mặt phẳng α qua A và chứa d_1.

• Mặt phẳng β qua A và chứa d_2.

Chú ý có thể d_1 song song với β !! và d_2 song song với α !!

(Như vậy phải thêm bước kiểm tra xem có song song không!)

Suy ra giao tuyến Δ của hai mặt phẳng α và β đi qua ba điểm A, M, N. Hay ba điểm A, M, N thẳng hàng. Ta tìm tọa độ M bằng cách giải hệ gồm pt của d_1 và β , tìm tọa độ của N bằng cách giải hệ gồm pt của d_2 và α .

• *Sau đây là cách giải theo ý tưởng của bài viết*

Gọi M(2m; m+1; -1-m) $\in d_1$ và N(1+t; -1-2t; 2+t) $\in d_2 \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (2m;\ m;\ -3-m)$ và

$\overrightarrow{AN} = (1+t;\ -2-2t;\ t) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}\right]$ = (-mt -2m - 6t - 6; -3mt – m - 3t - 3; -5mt - 5m).

A, M, N thẳng hàng $\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}\right] = \vec{0} \Leftrightarrow m = 0, n = -1$

$\Rightarrow$ M(0; 1; - 1) và N(0; 1; 1) là hai điểm cần tìm.

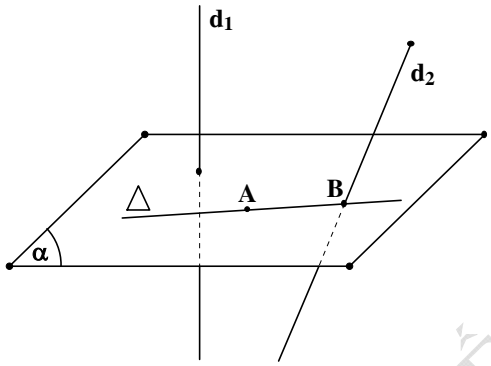
★ Bài 4. (Đề thi Đại học khối D năm 2006)

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho điểm A(1; 2; 3) và hai đường thẳng :

$$d_1 : \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1} \ ; \qquad d_2 : \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}.$$

Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc với d_1 và cắt d_2.

GV: VÕ THANH HẢI - THPT ĐOÀN KẾT



- *Sau đây là một hướng giải thông dụng.*

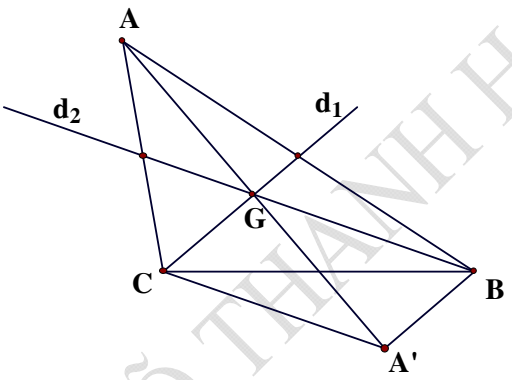
  - Viết phương trình mặt phẳng α qua A và vuông góc với d_1.
  - Tìm giao điểm B của d_2 và mp α .
  - Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm A, B là đường thẳng Δ cần tìm.

- *Sau đây là cách giải theo ý tưởng của bài viết*

Gọi $B = \Delta \cap d_2 \Rightarrow B \in d_2$
$\Rightarrow$ B(1 – t ; 1 + 2t; - 1 + t)
$\Rightarrow \overrightarrow{BA}$ = (- t; 2t – 1; t – 4) d_1 có 1VTCP $\vec{u}$ = (2; - 1; 1). Vì $\Delta \perp d_1$ nên $\overrightarrow{BA} \perp \vec{u}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow 2(-t) - 1(2t - 1) + 1(t - 4) = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow \overrightarrow{BA}$ = (1; -3; -5).
Đường thẳng Δ qua A và có 1VTCP $\overrightarrow{BA}$ nên Δ có phương trình $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-5}$

★ Bài 5. (Bộ đề thi tuyển sinh Đại Học và Cao Đẳng)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC, biết A(1; 3) và hai trung tuyến xuất phát từ đỉnh C và B lần lượt là $d_1 : x - 2y + 1 = 0$ và $d_2 : y - 1 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh B và C của tam giác ABC.



- *Sau đây là một hướng giải thông dụng.*

+ Tìm trọng tâm G của tam giác ABC (G(1; 1))
+ Gọi A' là điểm đối xứng của A qua G thì A'(1; -1)
+ Viết phương trình đường thẳng A'B qua A' và song song với d_1. Tìm tọa độ B bằng cách giải hệ gồm phương trình của d_2 và đường thẳng A'B.
+ Tương tự, viết phương trình đường thẳng A'C qua A' và song song với d_2. Tìm tọa độ C bằng cách giải hệ gồm phương trình của d_1 và đường thẳng A'C.

- *Sau đây là cách giải theo ý tưởng của bài viết*

Vì $B \in d_2$ nên B(b; 1) và $C \in d_1$ nên C(2c – 1; c). Gọi $M = d_1 \cap AB$ và $N = d_2 \cap AC$, thì M(2m – 1; m) và N(n; 1)

Khi đó M và N là trung điểm của AB và AC $\Rightarrow \begin{cases} 2m - 1 = \frac{b+1}{2} \\ m = \frac{3+1}{2} \end{cases}$ và $\begin{cases} n = \frac{1+2c-1}{2} \\ 1 = \frac{3+c}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ b = 5 \end{cases}$ và $\begin{cases} c = -1 \\ n = -1 \end{cases}$. Vậy B(5; 1) và C(-3; -1).

GV: VÕ THANH HẢI - THPT ĐOÀN KẾT

★ Bài 6. (Bộ đề thi tuyển sinh Đại Học và Cao Đẳng)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho điểm P(3; 0) và hai đường thẳng :
$d_1 : 2x - y - 2 = 0$ và $d_2 : x + y + 3 = 0$.
Viết phương trình đường thẳng d đi qua P, cắt d_1, d_2 lần lượt tại A và B sao cho P là trung điểm của đoạn AB.

- *Cách giải thông dụng của bài này tương tự bài 5*
- *Sau đây là cách giải theo ý tưởng của bài viết*

Ta có $A = d_1 \cap d \Rightarrow A \in d_1 \Rightarrow A(a; 2a - 2)$ và $B = d_2 \cap d \Rightarrow B \in d_2 \Rightarrow B(b; -3 - b)$. P là trung điểm của đoạn AB nên : $\begin{cases} \frac{a+b}{2} = 3 \\ \frac{2a-b-5}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=6 \\ 2a-b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{11}{3} \\ b = \frac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{11}{3}; \frac{16}{3}\right)$.

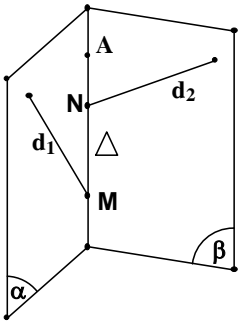
Vậy đường thẳng d qua P(3; 0) và có 1VTCP $\overrightarrow{PA} = \left(\frac{2}{3}; \frac{16}{3}\right)$ hay $\vec{u} = (1; 8)$

nên d có phương trình: $\frac{x-3}{1} = \frac{y}{8}$.

★ Bài 7. (Bộ đề thi Đại Học và Cao Đẳng)

Trong không gian Oxyz cho điểm A(1; 1; 1) và hai đường thẳng :
$d_1 : \begin{cases} x+y+z-3=0 \\ y+z-1=0 \end{cases}$ và $d_2 : \begin{cases} x-2y-2z+9=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}$.
Viết phương trình đường thẳng Δ qua A và cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2.

- *Cách giải thông dụng của bài này tương tự bài 3*
- *Sau đây là cách giải theo ý tưởng của bài viết*



Gọi $M = d_1 \cap \Delta \Rightarrow M(2; m; 1 - m)$ và $N = d_2 \cap \Delta \Rightarrow N(4n-7; n; n+1)$
$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = (1; m - 1; -m)$ và $\overrightarrow{AN} = (4n - 8; n - 1; n)$
$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AN}\right] = \left(\begin{vmatrix} m-1 & -m \\ n-1 & n \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -m & 1 \\ n & 4n-8 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & m-1 \\ 4n-8 & n-1 \end{vmatrix}\right)$
Theo bài ra thì ba điểm A, M, N thẳng hàng nên $\left[\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AN}\right] = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2mn - m - n = 0 \\ -4mn + 8m - n = 0 \\ -4mn + 8m + 5n = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{4} \\ n = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \left(1; -\frac{1}{4}; -\frac{3}{4}\right)$ hay

$\vec{u} = (4; -1; -3)$ là 1VTCP của Δ nên Δ có phương trình : $\frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-3}$.

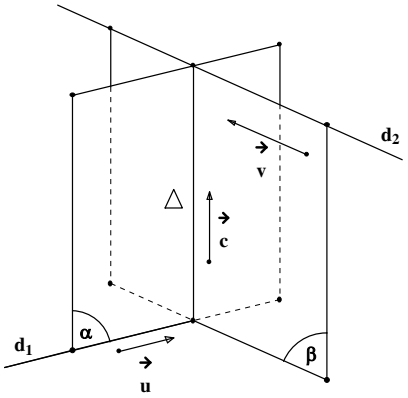
GV. VÕ THANH HẢI - THPT ĐOÀN KẾT

★ Bài 8. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai đường thẳng

$$d_1:\begin{cases}x=1\\y=-4+2t\\z=3+t\end{cases} \quad \text{và } d_2:\begin{cases}2x+3y-9=0\\z=-2\end{cases}$$

a) Chứng tỏ hai dường thẳng d_1 và d_2 chéo nhau.

b) Lập phương trình đường thẳng Δ là đường vuông góc chung của hai đường thẳng d_1 và d_2.



• *Cách giải thông dụng được minh họa ở hình bên*

• *Cách giải theo ý tưởng của bài viết*

a) Độc giả tự giải.

b) Gọi $M = \Delta \cap d_1$ và $N = \Delta \cap d_2 \Rightarrow M \in d_1$ và $n \in d_2$

$\Rightarrow M(1; -4 + 2m; 3 + m)$ và $N(3n; 3 -2n; - 2)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = (3n - 1; -2n - 2m + 7; -5 - m)$.

d_1 có 1VTCP $\vec{u} = (0; 2; 1)$, d_2 có 1VTCP $\vec{v} = (3; -2; 0)$

Vì Δ là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau d_1 và d_2 nên ta có : $\begin{cases}\vec{u}\perp\overrightarrow{MN}\\\vec{v}\perp\overrightarrow{MN}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\vec{u}.\overrightarrow{MN}=0\\\vec{v}.\overrightarrow{MN}=0\end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases}0(3n-1)+2(-2n-2m+7)+1(-5-m)=0\\3(3n-1)-2(-2n-2m+7)+0(-5-m)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4n+5m=9\\13n+4m=17\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}n=1\\m=1\end{cases}$ Khi đó đường thẳng Δ qua M(1; -2; 4) và có 1VTCP : $\overrightarrow{MN}$ = (2; 3; -6)

nên phương trình của Δ là : $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-4}{-6}$.

✪BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ.

★ Bài1. Trong không gian Oxyz cho ba đường thẳng:

$$d_1:\begin{cases}x=3t\\y=1-t\\z=5+t\end{cases};\qquad d_2:\ \frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-2}{3};\qquad d_3:\begin{cases}x-y+4z-3=0\\2x-y-z+1=0\end{cases}.$$

Viết phương trình đường thẳng Δ thỏa: Δ song song với d_1 và cắt cả hai đường thẳng d_2 và d_3

★ Bài 2 . (Đề thi Đại học khối B năm 2004)

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho điểm A(-4; - 2; 4) và đường thẳng $d:\begin{cases}x=-3+2t\\y=1-t\\z=-1+4t\end{cases}$.

Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, cắt và vuông góc với d.

★ Bài 3. (Đề thi Đại học khối A năm 2005)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai đường thẳng $d_1 : x - y = 0$, $d_2 : 2x + y - 1 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh hình vuông ABCD, biết đỉnh A thuộc d_1, C thuộc d_2, B và D thuộc trục hoành.

2. Trong không gian Oxyz cho đường thẳng d : $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-3}{1}$

và mặt phẳng (P) : 2x + y – 2z + 9 = 0.

a) Tìm tọa độ điểm I thuộc đường thẳng d sao cho khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) bằng 2.

b) Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P), đi qua giao điểm của d và (P) và vuông góc với d.

GV: VÕ THANH HẢI - THPT TOÀN KẾT