Số e

Trong quá trình dạy toán ở trường THPT tôi nhận thấy vai trò của số e rất quan trọng, nhất là trong chương trình toán 12. Tuy nhiên trong sách giáo khoa *(kể cả bài đọc thêm)* chưa trình bày kiến thức cơ bản về số e một cách có hệ thống. Bằng kiến thức của bản thân kết hợp với việc tìm tòi trên internet, tôi quyết định viết một chủ đề cơ bản về số e trong phạm vi kiến thức toán phổ thông. Mục tiêu của bài viết là nhằm thỏa mãn nhu cầu kiến thức vế số e ở bậc phổ thông của thầy cô giáo dạy toán và các em HS giỏi yêu toán. Với những hạn chế nhất định về kiến thức và cái nhìn chủ quan của bản thân, chắc chắn bài viết còn nhiều thiếu sót, rất mong được quý thầy cô và các em HS góp ý.

I. Sự tồn tại của số e

Trong phần này có sử dụng bất đẳng thức Bec-nu-li

> Cho số a > 0 và $n \in N$ ta có $(a+1)^n \geq 1+na$

(Có thể chứng minh dễ dàng BĐT trên bằng phương pháp chứng minh qui nạp)

Xét dãy số (u_n) với $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, n \in N^*$. Ta chứng minh rằng dãy này có giới hạn

Để đơn giàn ta xét dãy (v_n) với $v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, n \in N^*$.

Dễ thấy $v_n > 0, \forall n \in N^*$ nên dãy (v_n) bị chặn dưới (1)

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức Bec-nu-li với $a = \frac{1}{(n+1)^2}$ ta có

$$\left(1+\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \geq 1+(n+1)\frac{1}{(n+1)^2} \text{ mà } \left(1+\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} < \left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1}$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1} > 1+\frac{1}{n+1} \Rightarrow \left[\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right]^{n+1} > \frac{n+2}{n+1} \Rightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} > \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}\frac{n+2}{n+1}$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} \Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} \Rightarrow v_n > v_{n+1}$$

Từ đó suy ra (v_n) là dãy số giảm (2). Từ (1) và (2) suy ra dãy (v_n) có giới hạn. Ta gọi $e = \lim v_n$

Ta có $\lim u_n = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n}} = \lim\frac{v_n}{1+\frac{1}{n}} = \frac{e}{1} = e$. Vây ta có $\boxed{\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e}$

(Với n = 10000 ta tính được $e \approx 2,71814593682$)

Định lý 1: Với $x \in R$ ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

Chứng minh:

Ta gọi $n = [x]$ (gọi là phần nguyên của x, số nguyên lớn nhất nhỏ hơn hay bằng x). Vì $x \to +\infty$ nên ta chỉ cần xét x > 0 và khi đó n là số tự nhiên. Dễ thấy $n \le x < n+1, \forall x \in (0;+\infty)$. Từ đó suy ra

$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \le \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ Mà ta có $\lim\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = \frac{e}{1} = e$ và ta cũng có

$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) = e.1 = e$ Theo định lý kẹp ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

Bây giờ đặt $x = -t$ ta có

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-t}\right)^{-t} = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{-t}{-t+1}\right)^t = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^t = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{t-1+1}{t-1}\right)^t$

$= \lim\limits_{t\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)\right] = e.1 = e$. Vậy ta có hệ quả từ định lý: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

Với $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$, ta đặt $t = \frac{1}{x}$ ta có $\lim\limits_{x\to0^+}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e$. (*)

Với $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$, ta đặt $t = \frac{1}{x}$ ta có $\lim\limits_{x\to0^-}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e$. (**). Từ (*) và (**) ta có

Định lý 2: $\boxed{\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e}$

II.Hai giới hạn cơ bản từ số e

Định lý 3: $\boxed{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x} = 1}$ $\boxed{\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} = 1}$

Chứng minh:

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x} = \lim\limits_{x\to0}\left[\frac{1}{x}\ln(x+1)\right] = \lim\limits_{x\to0}\left[\ln(x+1)^{\frac{1}{x}}\right] = \ln e = 1$ (Sử dụng Định lý 2)

Đặt $t = e^x - 1$ ta có $x = \ln(t+1)$ và $x \to 0 \Leftrightarrow t \to 0$. Từ đó suy ra

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(t+1)} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(t+1)}{t}} = \frac{1}{1} = 1$$

III. Đạo hàm của hàm số mũ, hàm số logarit và hàm số lũy thừa

<u>Định lý 4</u>:

1) $\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$ với $x \in (0;+\infty)$

2) $\left(e^x\right)' = e^x$ với $x \in R$

3) $\left(x^\alpha\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$ với $x \in (0;+\infty)$ và $\alpha \in R$

Chứng minh:

1) Xét hàm số $y = f(x) = \ln x$. Cho x số gia Δx ta có

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \ln(x+\Delta x) - \ln x = \ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right) = \ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$\left(\ln x\right)' = f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{x\frac{\Delta x}{x}} = \frac{1}{x}.1 = \frac{1}{x}$$ (Dùng giới hạn cơ bản, ĐL

3)

2) Xét hàm số $y = f(x) = e^x$. Cho x số gia Δx ta có

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = e^{x+\Delta x} - e^x = e^x\left(e^{\Delta x} - 1\right)$$

$$(e^x)' = f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^x\left(e^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x} = e^x.1 = e^x$$ (Dùng giới hạn cơ bản, ĐL 3)

3) $\left(x^\alpha\right)' = \left(e^{\ln x^\alpha}\right)' = \left(e^{\alpha\ln x}\right)' = e^{\alpha\ln x}\left(\alpha\ln x\right)' = x^\alpha.\alpha\frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$ (Sử dụng 1) và 2))

Thầy Vũ Quốc Khanh – GV tổ Toán – Tin

Hết