Dưới đây là 1 phần trong sáng kiến kinh nghiệm " Phương pháp hàm số tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất ". Sáng kiến kinh nghiệm trên đã được đánh giá loại suất sắc trong kỳ thi chọn giáo viên giỏi tỉnh Đồng Nai năm học 2013-2014. Trong phần 1 này tôi giới thiệu khái niệm và cách tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số chứa 1 biến bằng phương pháp hàm số.

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ NHẤT BIẾN

1.1 Khái niệm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của 1 biểu thức nhất biến

1.1.1. Giá trị lớn nhất của hàm số (GTLN)

- **Định nghĩa 1:** Cho hàm số y = f(x) xác định trên D $\subset$ R. Số thực M được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số y = f(x) trên D nếu thỏa mãn hai điều kiện sau:

  1) f(x) $\leq$ M với mọi x $\in$ D.

  2) Tồn tại $x_0 \in$ D sao cho f(x_0) = M.

  Kí hiệu: $\underset{x\in D}{Max}\, f(x) = M$.

- **Ví dụ 1:** Cho hàm số $y = -x^2 + 2x + 3$ xác định trên R. Ta có

  $y = -(x-1)^2 + 4 \leq 4$ với mọi x$\in$ R và y(1) = 4 nên giá trị lớn nhất của hàm số trên bằng 4.

1.1.2. Giá trị nhỏ nhất của hàm số (GTNN)

- **Định nghĩa 2:** Cho hàm số y = f(x) xác định trên D $\subset$ R. Số thực m được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số y = f(x) trên D nếu thỏa mãn hai điều kiện sau:

  1) f(x) $\geq$ m với mọi x $\in$ D.

  2) Tồn tại $x_0 \in$ D sao cho f(x_0) = m.

  Kí hiệu: $\underset{x\in D}{Min}\, f(x) = m$.

- **Ví dụ 2:** Cho hàm số $y = x^2 + 2x + 3$ xác định trên R. Ta có

  $y = (x+1)^2 + 2 \geq 2$ với mọi x$\in$ R và y(-1) = 2 nên giá trị nhỏ nhất của hàm số trên bằng 2.

Ta quy ước rằng khi nói giá trị lớn nhất hay giá trị nhỏ nhất của hàm số f (mà không nói rõ trên D) thì ta hiểu đó là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số f trên tập xác định của nó.

Từ sau mục này, trong nội dung sáng kiến kinh nghiệm (SKKN), chúng tôi sẽ viết tắt giá trị lớn nhất là GTLN và giá trị nhỏ nhất là GTNN.

1.2 Phương pháp tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức nhất biến

Trong mục này, chúng tôi sẽ trình bày phương pháp tìm GTLN, GTNN của hàm số y = f(x) trên một tập hợp D. Phương pháp đó gồm các bước sau:

1) Bước 1: Lập bảng biến thiên của hàm số y = f(x) trên D.
2) Bước 2: Dựa vào bảng biến thiên kết luận GTLN, GTNN.

• **Ví dụ 3:** Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = x^3 – 3x+1$ trên đoạn [-2; 2]

Giải: Ta có $y' = 3x^2 – 3$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$$

Bảng biến thiên của hàm số $y = x^3 – 3x+1$ trên đoạn [-2; 2]

x	-2		-1		1		2
y’		+	0	-	0	+	
y	1	↗	3	↘	-1	↗	3

Từ bảng biến thiên, ta được $\underset{x\in[-2;2]}{Max}\, y = y(-1) = y(2) = 3$, $\underset{x\in[-2;2]}{Min}\, y = y(1) = -1$.

Chú ý 1: Nếu bài toán yêu cầu tìm GTLN, GTNN của hàm số mà không nói rõ trên tập hợp D thì ta phải tìm tập xác định của hàm số.

• **Ví dụ 4:** Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = x + \sqrt{4-x^2}$

Giải: Tập xác định của hàm số: D = [-2; 2]

$$y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{\sqrt{4-x^2}-x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$$

Bảng biến thiên của hàm số $y = x + \sqrt{4-x^2}$ trên đoạn [-2; 2]

x	-2		$\sqrt{2}$		2
y'	||	+	0	-	||
y	-2	↗	$2\sqrt{2}$	↘	2

Từ bảng biến thiên, ta được $\underset{x\in[-2;2]}{Max}\, y = y(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$, $\underset{x\in[-2;2]}{Min}\, y = y(-2) = -2$.

Chú ý 2: Một số bài toán tìm GTLN, GTNN của hàm số mà hàm số phức tạp, ta có thể đặt ẩn phụ đưa hàm số ban đầu về hàm số đơn giản hơn. Khi đó cần lưu ý tìm điều kiện của ẩn mới.

1.3 Phương pháp đặt ẩn phụ tìm GTLN, GTNN của biểu thức nhất biến.

Bài toán: Tìm GTLN, GTNN của hàm số y = f(u(x)) với $x \in D$.

Cách giải: Bước 1: Đặt u = u(x)

Bước 2: Từ điều kiện $x \in D$ suy ra điều kiện của ẩn mới $u \in D'$

Bước 3: Tìm GTLN, GTNN của hàm số y = f(u) với $u \in D'$.

Bước 4: Kết luận.

• **Ví dụ 5:** Tìm GTLN, GTNN của hàm số y = $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2} + 2\sqrt{1-x^4} + 2$

Nhận xét: Trong bài toán trên, nếu ta không đặt ẩn phụ mà lập luôn bảng biến thiên của hàm số đó thì dẫn đến 1 lời giải khá dài và phức tạp. Cách giải bài toán trên như sau:

Giải: Tập xác định của hàm số: D = [-1; 1]

Đặt t = $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}$. Bằng cách lập bảng biến thiên của hàm số

y = $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}$ trên đoạn [-1; 1] ta tìm được $t \in [\sqrt{2}; 2]$.

Ta có t = $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow 2\sqrt{1-x^4} = t^2 - 2$. Khi đó, hàm số ban đầu trở thành $y = t^2 + t$, với $t \in [\sqrt{2}; 2]$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = t^2 + t$, với $t \in [\sqrt{2}; 2]$

x	$\sqrt{2}$	2
y'	+	

y	$2+\sqrt{2}$ ⟶ 6

Vậy $\underset{x\in[-1;1]}{Max}\, y = y(0) = 6$; $\underset{x\in[-1;1]}{Min}\, y = y(-1) = y(1) = 2+\sqrt{2}$.

1.4 Bài Tập. Tìm GTLN, GTNN của các hàm số sau :

1) $y = 3x^2 - 6x + 2$ trên đoạn [-2; 4]

2) $y = x + \sqrt{9-x^2}$

3) $y = \sin 2x - x$ trên đoạn $[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}]$

4) $y = 3\cos^2 x - 6\cos x + 1$

5) $y = \sqrt{4+x^2} + \sqrt{4-x^2} + 2\sqrt{16-x^4}$

6) $y = -2x^2 + x - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}$ trên đoạn [1; 2]

7) $y = \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} - \sqrt{18+3x-x^2}$

8) $y = \sqrt{1+x} + \sqrt{2-x} - \sqrt{2+x-x^2}$

9) $y = x + x^2 + x^3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ trên đoạn [1; 2]

Giáo viên Hoàng Ngọc Huệ - THPT Đoàn Kết.